Cvičení ze stochastické analýzy

1. opakování (diskrétních) martingalů

1. definice martingalu, základní příklady odvozené od náhodné procházky
2. pojem stejnoměrně integrovatelného martingalu a uzávěru, podmiňování σ-algebrou událostí
3. Waldovy rovnosti pro markovské časy

---

1. Nechť $S_n, n \in \mathbb{N}$ je náhodná procházka. Označme $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Za jakých předpokladů je následující proces $\mathcal{F}_n$-martingal (super, sub)?
   (a) S_n
   (b) $S_n^2 - n\sigma^2$ pro nějaké $\sigma \in \mathbb{R}$
   (c) $\exp\{\alpha S_n - \beta n\}$ pro nějaká $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, resp. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

   Nechť navíc $X_n = S_n - S_{n-1} > 0, n \in \mathbb{N}$ mají hustotu $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{[x>0]}$, kde $\lambda > 0$. Označme

   $$N_t = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[S_k \le t]}.$$

   Pak N_t je ***Poissonův proces s intenzitou $\boldsymbol{\lambda}$***, což mj. znamená, že náhodná veličina $N_t - N_s \sim \mathtt{Po}(\lambda|t-s|)$ je nezávislá se σ-algebrou $\mathcal{F}^N_{s\wedge t}$ kdykoli $s, t \ge 0$, kde $\mathcal{F}^N_t = \sigma(N_s, s \le t)$.
   (a) Rozhodnětě, pro jaká $\mu \in \mathbb{R}$ je proces $N_t - \mu t$ $\mathcal{F}^N_t$-martingal.
   (b) Rozhodnětě, pro jaká $\sigma \in \mathbb{R}$ je proces $M_t^2 - \sigma^2 t$ $\mathcal{F}^N_t$-martingal, kde $M_t = N_t - EN_t$.
   (c) Pro jaká $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, resp. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je proces $\exp\{\alpha N_t - \beta t\}$ $\mathcal{F}^N_t$-martingal ?
2. Nechť $(M_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a $\tau < \infty$ je $\mathcal{F}_n$-markovský čas. Rozhodněte, zda platí následující rovnost

   $$EM_\tau = EM_0 \tag{1}$$

   (a) obecně
   (b) je-li $\tau \in \mathbb{L}_\infty$
   (c) je-li $\sup_n |M_n| \in \mathbb{L}_\infty$
   (d) je-li $\sup_n |M_{n\wedge\tau}| \in \mathbb{L}_\infty$
   (e) je-li $M_{n\wedge\tau}$ stejnoměrně integrovatelný proces
   (f) je-li M_n stejnoměrně integrovatelný proces
   (g) je-li M_n zdola omezený proces
3. Waldovy rovnosti. Nechť $S_n, n \in \mathbb{N}$ je náhodná procházka. Označme $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Buďte $\nu \le \tau < \infty$ $\mathcal{F}_n$-markovské časy.
   (a) Za jakých předpokladů platí (1) pro $M_n = S_n - ES_n =: \mathbb{S}_n$.
   (b) Za jakých předpokladů platí (1) pro $M_n = \mathbb{S}_n^2 - E\mathbb{S}_n^2$.
   (c) Za jakých předpokladů platí (2) pro $M_n = \mathbb{S}_n$.
   (d) Za jakých předpokladů platí (2) pro $M_n = \mathbb{S}_n^2 - E\mathbb{S}_n^2$.
   (e) Za jakých předpokladů platí (2) pro $M_n = \exp\{\alpha S_n - \beta n\}$, kde $\beta = \ln Ee^{\alpha X_1}$.

   $$E[M_\tau|\mathcal{F}_\nu] \overset{\text{sj}}{=} M_\nu. \tag{2}$$

Je-li M_n stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-martingal, pak existuje uzávěr M_∞. Je-li τ $\mathcal{F}_n$-markovský čas, pak pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$E[M_\infty|\mathcal{F}_{n\wedge\tau}] \overset{\text{sj}}{=} M_{n\wedge\tau},$$

a tedy proces $(M_{n\wedge\tau}, n \in \mathbb{N}_0)$ je stejnoměrně integrovatelný proces. Protože $(M_{n\wedge\tau}, n \in \mathbb{N}_0)$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, má uzávěr $U \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\infty)$, a tedy

$$U \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} M_{n\wedge\tau} \overset{\text{sj}}{=} M_\tau.$$

Závěr tedy je, že $(M_{n\wedge\tau}, n \in \mathbb{N}_0)$ je stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-martingal s uzávěrem $M_\tau \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\tau)$.

Nechť $T \subseteq \mathbb{R}$ je (časová) indexová množina a nechť $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je neklesající systém σ-algeber na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Proces $M_t \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P|\mathcal{F}_t), t \in T$ se nazývá ***$\mathcal{F}_t$-martingal***, pokud

$$\forall\, s,t \in T \qquad E[M_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} M_{s\wedge t} \qquad\qquad (\geq \text{sj. } \textbf{\textit{sub}}), (\leq \text{sj. } \textbf{\textit{super}}).$$

Proces $M_t \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P|\mathcal{F}_t), t \in T$ je ***stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_t$-martingal*** právě tehdy, když existuje veličina $M_\infty \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P|\mathcal{F}_\infty)$ zvaná ***uzávěr*** taková, že

$$\forall\, t \in T \quad E[M_\infty|\mathcal{F}_t] \overset{\text{sj}}{=} M_t.$$

1. Proces $M_t \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P|\mathcal{F}_t), t \in T$ je $\mathcal{F}_t$-martingal právě tehdy, když pro každý $\mathcal{F}_t$-markovský čas $\tau : \Omega \to \{s, r\} \subseteq T$ platí $EM_s = EM_\tau$.

2. Je-li proces $(M_t, t \in T)$ $\mathcal{F}_t$-submartingal (či $\mathcal{F}_t$-supermartingal), pak M_t je $\mathcal{F}_t$-martingal právě tehdy, když $t \in T \mapsto EM_t$ je konstantní funkce.

3. Je-li τ $\mathcal{F}_t$-markovský čas, pak ***σ-algebra událostí do času τ*** je definovaná

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \in T \;\; A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t\}.$$

   Pro $\mathcal{F}_t$-markovský čas ν a $A \in \mathcal{F}_\tau$ analogicky platí $A \cap [\tau \leq \nu] \in \mathcal{F}_\nu$. Protože však $[\tau \leq \nu] \in \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}$, platí

$$A \cap [\tau \leq \nu] \in \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau},$$

   přičemž pro $\mathcal{F}_t$-markovské časy $\nu \leq \tau$ podoně jako pro deterministické hodnoty platí $\mathcal{F}_\nu \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

4. Je-li $Z \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a je-li $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ $\mathcal{F}_t$-markovský čas, pak

$$1_{[\tau=t]} \cdot E[Z|\mathcal{F}_\tau] \overset{\text{sj}}{=} 1_{[\tau=t]} \cdot E[Z|\mathcal{F}_t]. \tag{3}$$

   Speciálně, je-li $(M_n, n \in \mathbb{N})$ stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-martingal s uzávěrem M_∞ a $\nu : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je $\mathcal{F}_n$-markovský čas, pak

$$E[M_\infty|\mathcal{F}_\nu] \overset{\text{sj}}{=} M_\nu.$$

   Důkaz: Ukážeme obecnější tvrzení. Buď ν také $\mathcal{F}_t$-markovský čas, ukážeme z definice, že platí

$$1_{[\nu\leq\tau]} \cdot E[Z|\mathcal{F}_\nu] \overset{\text{sj}}{=} 1_{[\nu\leq\tau]} \cdot E[Z|\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]. \tag{4}$$

   Z této rovnosti pak volbou $\nu = t$ zhruba řečeno dostaneme, že $E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge t}] = E[Z|\mathcal{F}_t]$ se sj. rovná na množině $[t \leq \tau]$, a ze symetrie t a τ dostaneme, že $E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge t}] = E[Z|\mathcal{F}_\tau]$ se sj. rovná na množině $[t \geq \tau]$. Na množině $[\tau = t]$ tak dostáváme sj. rovnost $E[Z|\mathcal{F}_\tau] = E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge t}] = E[Z|\mathcal{F}_t]$, tj. platí (3).

   Víme $[\nu \leq \tau] \in \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau} = \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau$. Je-li $F \in \mathcal{F}_\nu$, pak $G = F \cap [\nu \leq \tau] \in \mathcal{F}_\tau$, a tedy $G \in \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}$. Dále

$$\int_F 1_{[\nu\leq\tau]} \cdot E[Z|\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]\, \mathrm{d}P = \int_G E[Z|\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]\, \mathrm{d}P = \int_G Z\, \mathrm{d}P = \int_F 1_{[\nu\leq\tau]} \cdot Z\, \mathrm{d}P$$

   Protože $1_{[\nu\leq\tau]} \cdot E[Z|\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau})$, dostáváme rovnost (4).

---

5. Řekneme, že proces A_t je ***adaptovaný*** na filtraci $\mathcal{F}_t$ a píšeme $\boldsymbol{A_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)}$, pokud $A_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t)$ platí pro každé $t \in T$.

6. Čas $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ je ***$\mathcal{F}_t$-markovský*** právě tehdy, když jeho čítací proces $1_{[\tau\leq t]} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný.

7. Je-li τ je $\mathcal{F}_t$-markovský čas, pak $\boldsymbol{A \in \mathcal{F}_\tau}$ právě tehdy, když proces $1_A \cdot 1_{[\tau\leq t]} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný.